**非齐次亥姆霍兹方程 推迟势**

2015/12/9

波动方程为

 (1)

用格林函数法求解, 令格林函数满足

 (2)

这个方程的意义是, 如果在时刻t, 处出现一个极短的脉冲, 会生成怎样的波函数G. 求出G以后, 我们可以把非齐次项看成由许许多多这样的脉冲组成, 对空间和时间进行积分. 即可得到式(1)的解.

 (3)

下文用傅里叶变换法解(2)式解出格林函数为

 (4)

(4)式(3)式得方程(1)的解为

 (5)

式(5)与静电场的势能公式很像, 但是场源的时间做了修正. 其中定义为推迟时间(retarded time), 是波从到所需的时间. 也就是说, 并不能马上影响, 而是需要一个”信号传播时间”才行. 在静电场中, 由于场源不随时间变化, 所以不需要考虑时间延迟.

**具体过程**

**1.解格林函数** 

从物理意义上, 要求格林函数在以为中心的任意方向都相同, 即只是的函数. 以下为了方便, 令.

由于等式右边除了原点外都是零, 方程为齐次方程. 齐次解为平面波



求和是对所有满足和边界条件的和求和(或积分). 但显然该解在原点不满足要求. 为了排除原点, 且满足对称性, 以为原点建立球坐标, 改用球坐标中的拉普拉斯方程, 方程变为

 (6)

在的条件下解齐次方程, 首先分离变量, 得到分离变量解

(提示: )

 (7)

所以通解为式(7)对不同的求和. 然而是连续的, 所以改用傅里叶变换法解方程(6).



(10)就是(7)对连续的求和(积分)得到的通解, 待定系数包含在*A*里面, 下面的式(13)验证了这点. 另外, 式(6)右边含时Delta函数的傅里叶变换为

 (11)

(10)(11)代入方程(6)得到经过时间傅里叶变换的偏微分方程, 与(6)等效.

 (12)

注意这是关于位置的偏微分方程, 视为常数. 解这条方程, 就相当于解出了固定振动频率的波源所产生的同频率的波动方程. 齐次解为

 (13)

(解方程提示: , 令 )

由于这是方程的通解, 而(12)的右边可以看做时的边界条件, 接下来利用边界条件找到适合的待定系数和.

首先当时, , . 所以

 (14)

(关于见空间狄拉克delta函数, 链接未完成). 代入(12)式左边第一项, 得

 (15)

由于空间delta函数, 所以相比之下在时可以忽略不计. 等式两边对比系数得

 (16)

再考虑(13)所代表的波函数分量, 第一项代表波源向外传播的球形波, 第二项代表向波源传播的, 所以, 式(13)变为

 (14)

现在可以把上式进行反傅里叶变换(10)得到格林函数



这就是式(2)的解(4).